keit fortfällt, daß immer ein Elektron und ein Wasserstoffkern zugleich entstehen müßte. Denkt man sich die Welt als aus Elektronen und Wasserstoffkernen bestehend und im Zustande vollständiger Dissoziation befindlich, so daß die Materie als Gemisch zweier idealer Gase betrachtet werden kann, so überschlägt man leicht, daß immer noch die Forderung $Mc^2 = u_s \cdot V$ erhalten bleibt. Es macht keinen Unterschied, ob ein Elektron oder ein Wasserstoffkern gebildet oder zerstrahlt wird. Die Neutralitätsforderung reduziert sich dann auf die triviale Bedingung, daß im Gleichgewichtszustand ebensoviel Elektronen als Wasserstoffkerne in der Welt vorhanden sein müssen; da ja stets ebenso viele Gebilde jeder Art erzeugt werden als zerstrahlen, so bleibt der Zustand der Neutralität dauernd erhalten.

Zusammenfassung.

Die Anwendung einer Überlegung von O. Stern betr. das Gleichgewicht zwischen Strahlung und Materie auf Einsteins geschlossene Welt liefert die Bedingung, daß die Strahlungsenergie und die materielle Energie der Welt einander gleich sein müssen und ergibt bei Kenntnis des Weltradius eine Bestimmung der Temperatur des Weltraumes.

(Eingegangen 23. August 1926.)

Die Form der Raum—Zeit-Oberfläche eines Gravitationsfeldes, das von einer punktförmigen Masse herrührt [1]).

Von Enrique Loedel-Palumbo.

Man weiß, daß nach Einsteins Gravitationstheorie die Gravitation nichts anderes als die Kundgebung der nicht-euklidischen Struktur des Universums ist. Die Bahn eines freien Körpers würde eine geodätische Linie der nichteuklidischen Raum—Zeit-Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen sein. Somit ist das Gravitationsproblem nur ein rein geometrisches Problem.

Das Einsteinsche Gravitationsgesetz, — in Formel geschrieben: $G_{rs} = 0$; in welcher G_{rs} der zusammengezogene Tensor von Riemann-Christoffel ist, — führt dahin, als den Ausdruck des Linienelementes der Raum—Zeit-Mannigfaltigkeit den folgenden Ausdruck von Schwarzschild anzunehmen:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2Km}{c^2 r}\right)dt^2 - \\ - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \frac{1}{1 - \frac{2Km}{c^2 r}}\, dr^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn die Masse m in dem Anfangspunkt der Polarkoordinaten r, ϑ und φ, t existiert; dann ist K die Newtonsche Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit.

Wenn man $c = 1$ und $2Km = A$ setzt, und wenn man $\vartheta =$ konst. und $\varphi =$ konstant nimmt, folgt:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{A}{r}}\,dr^2, \quad (2)$$

welches der Ausdruck des Linienelementes einer zweidimensionalen Oberfläche ist. Die geodätischen Linien dieser Oberfläche werden die Linien im Universum, welche die Körper im Fallen beschreiben, sein, wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null ist oder die Richtung von r hat.

Um uns diese Oberfläche vorstellen zu können und dadurch ein konkretes Bild von ihr zu bekommen, das uns erlaubt, die Ursache der scheinbaren Anziehungskraft — die den Fall der Körper verursacht — zu sehen, tauchen wir sie in den dreidimensionalen euklidischen Raum ein.

Um die durch (2) ausgedrückte Oberfläche in Wirklichkeit umzusetzen, nehmen wir $t = i\tau$ und durch Vertauschung des Vorzeichens von ds^2 erhalten wir:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right)d\tau^2 + \frac{1}{1 - \frac{A}{r}}\,dr^2. \quad (3)$$

Seien x, y und z die orthogonalen kartesischen Koordinaten unseres dreidimensionalen Raumes, in welchem wir die durch (3) ausgedrückte Oberfläche einführen wollen, so haben wir:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4)$$

in welcher x, y und z gewisse Funktionen von τ und r sein werden:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(\tau r) \\ y &= Y(\tau r) \\ z &= Z(\tau r) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

welche um die Oberfläche zu kennen, bestimmt werden müssen.

[1]) Die Idee zu dieser Arbeit habe ich Herrn Einstein vorgelegt, anläßlich des Empfangs, den die Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales zu Buenos Aires ihm im vorigen Jahre bot, während er unter uns verweilte. Damals hatte ich die Gleichungen (6) noch nicht integriert, später jedoch kam ich dazu.

[1]) Siehe z. B.: Eddington, Espace, Temps et Gravitation 1921 (Theoretischer Teil, S. 67 ff).

Für die Formeln (5) haben wir:

$$dx^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 d\tau^2 + 2\frac{\partial X}{\partial \tau}\frac{\partial X}{\partial r} d\tau\, dr + \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2 dr^2,$$

$$dy^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial \tau}\right)^2 d\tau^2 + 2\frac{\partial Y}{\partial \tau}\frac{\partial Y}{\partial r} d\tau\, dr + \left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)^2 dr^2,$$

$$dz^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^2 d\tau^2 + 2\frac{\partial Z}{\partial \tau}\frac{\partial Z}{\partial r} d\tau\, dr + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 dr^2.$$

Summierend und die Koeffizienten in (3) und (5) gleichsetzend erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau}\right)^2 = 1 - \frac{A}{r} \\ &\frac{\partial X}{\partial \tau}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial \tau}\frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial \tau}\frac{\partial Z}{\partial r} = 0 \\ &\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{A}{r}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese Formeln müssen wir integrieren, um die Funktionen (5) zu erhalten. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} X &= \varphi(r)\cdot\cos\tau \\ Y &= \varphi(r)\cdot\sin\tau \\ Z &= \varphi(r) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

in welchen, wenn Z nur eine Funktion von r ist, die zweite Gleichung von (6), die der Orthogonalität, identisch befriedigt ist. Indem wir die Werte in die erste der obigen Gleichungen einführen, erhalten wir

$$\varphi(r) = \sqrt{1 - \frac{A}{r}} \quad (8)$$

und indem wir die Werte in die letzte der erwähnten Gleichungen einführen, mit Hilfe von (7) und (8)

$$\left(\frac{dZ}{dr}\right)^2 = \frac{4r^4 - A^2}{4r^4\left(1 - \frac{A}{r}\right)}. \quad (9)$$

Also werden die Funktionen, welche wir suchen, die folgenden sein

$$\left.\begin{aligned} X &= \sqrt{1 - \frac{A}{r}}\cdot\cos\tau \\ Y &= \sqrt{1 - \frac{A}{r}}\cdot\sin\tau \\ Z &= \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{4r^4 - A^2}{r^3(r-A)}}\,dr. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Da $x^2 + y^2 = 1 - \frac{A}{r}$; $r = \frac{A}{1-(x^2+y^2)}$ und Z nur eine Funktion von r ist, so stellen die Formeln (10) eine Umdrehungsoberfläche um die Achse Z dar.

Nehmen wir:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1 - \frac{A}{r}}; \\ r &= \frac{A}{1-R^2} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

dann ist der Ausdruck für Z:

$$Z = \int\sqrt{\frac{4A^2 - (1-R^2)^4}{(1-R^2)^4}}\,dR \quad (12)$$

in welchem wir reelle Werte von $\frac{dz}{dR}$ haben für die unten angeführten Werte von R^2:

$$1 - \sqrt{2A} \leq R^2 \leq 1. \quad (13)$$

Für r werden die entsprechenden Variationen, (siehe (11)) folgende sein:

$$\sqrt{\frac{A}{2}} \leq r \leq \infty, \quad (14)$$

für $R^2 = 1 - \sqrt{2A}$ ist $\frac{dz}{dR} = 0$, und für $R^2 = 1$, $\frac{dz}{dR} = \infty$; also ist in dem Intervall (13) $\frac{dz}{dR} > 0$ (wenn man für die Wurzel das positive Vorzeichen nimmt, d. h.. wenn man nur einen einzigen Zweig der Kurve in Betracht zieht).

Da außerdem in dem Intervall (13)

$$\frac{d^2z}{dR^2} > 0$$

so wird die Kurve konkav sein mit Rücksicht auf Z.

Durch das hier gesagte können wir uns eine Vorstellung von der — in Fig. 1 gezeichneten — Kurve machen.

Die Linien: $R =$ konst. werden die Zeitlinien, dargestellt durch Breitenkreise mit Zentrum in der Z-Achse, und die Meridiane der Oberfläche werden die Linien $t =$ konst. sein. Die Bahn eines Körpers, der von A mit der Geschwindigkeit Null ausgeht, würde die geodätische Linie durch A sein, tangentiell zu der Zeitlinie in diesem Punkt. Diese geodätische Linie ist repräsentiert durch die A, B, C Kurve, und im Durchschnitt durch A', B', C'. — Da wir

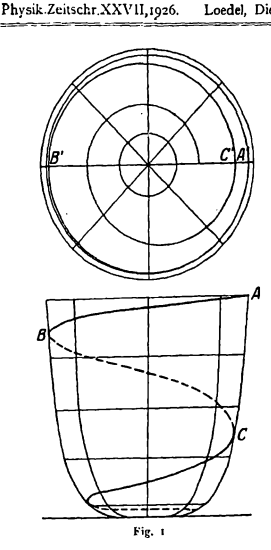


Fig. 1

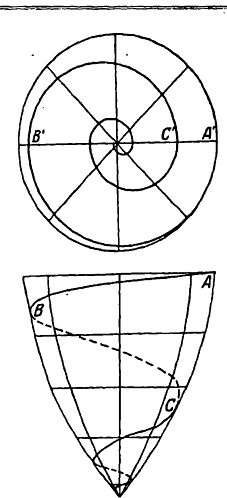


Fig. 2.

$c = 1$ gemacht haben, so wird die geodätische Linie eines Lichtstrahles nahezu bei 45^0 die Zeitlinien schneiden.

Durch (10) sehen wir, daß die Zeit τ wie ein Bogenstück des Breitenkreises fungiert. Für $r = \infty$ ist $R = 1$ und die Länge des Bogens, der in dem Unendlichen die Zeit mißt, wäre gleich dem Winkel α, der gebildet wird von zwei Meridiankurven, aber in einem Abstande R von Z wird die entsprechende Zeit durch

$$\tau' = R \cdot \alpha = R \cdot \tau$$

ausgedrückt sein; und da

$$R = \sqrt{1 - \frac{A}{r}}$$

haben wir:

$$\tau' = \sqrt{1 - \frac{A}{r}} \cdot \tau. \quad (15)$$

Daher erklären sich jetzt äußerst klar durch unsere geometrische Darstellung alle Folgen der Einsteinschen Gravitationstheorie, in welchen nur die Koordinaten r und t vorkommen.

Für $R = 1$ und $r = \infty$ ist die Oberfläche zylindrisch, d. h., sie hat die Krümmung Null, ist also einer Ebene äquivalent, und die geodätischen Linien, die Schraubenlinien sein sollten, verwandeln sich in gerade Linien. Darum, und wie es zu erwarten war, ist diese Oberfläche im Unendlichen euklidisch.

Durch die Formel (3) kann man die Gaussische Krümmung dieser Oberfläche mittels folgender Formel ausrechnen[1]):

$$K = \frac{(12, 12)}{g}, \quad (16)$$

in welcher (12, 12) das einzige Riemannsche Symbol erster Ordnung, das nicht zu Null wird, ist, und g die Diskriminante.

Es resultiert:

$$K = \frac{A}{r^3} \cdot \quad (17)$$

In dem Fall der Erde, wo $A = 1$ (konst.), ist die Krümmung der Raum—Zeit-Mannigfaltigkeit hervorgerufen durch das Gravitationsfeld der Erde, an ihrer Oberfläche nahezu:

$$K = 3{,}9 \; 10^{-27} \, [\mathrm{cm}^{-2}],$$

weshalb man sie in einer kleinen Region als euklidisch ansehen kann, was trotzdem nicht

1) Siehe z. B. Marcolongo, Relatività. Messina 1923. S. 19 ff.

hindert, daß es diese Krümmung ist, die die Gravitation verursacht, weil wir in der Zeit ungeheure Abstände durchlaufen, da eine Sekunde 300000 Kilometern entspricht. Ein Körper wenn er fällt, durchläuft nur etwa 5 Meter in der ersten Sekunde, in welcher die geodätische Linie des Falles sich die ersten 300 Millionen Meter von der Zeitlinie entfernt, gerechnet von dem Punkte auf der gemeinschaftlichen Tangente.

Diese geometrische Veranschaulichung kann man auch erlangen, indem man die reelle Zeit benutzt, d. h., indem man von Formel (2), statt von Formel (3) ausgeht.

Den gleichen Weg folgend, erhalten wir für x und y die gleichen Ausdrücke (10) und für $\frac{dz}{dr}$ statt (9) bekommen wir:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = -\frac{4r^4 + A^2}{4r^4\left(1 - \frac{A}{r}\right)}. \qquad (18)$$

Nehmen wir $\xi = iz$, folgt:

$$\frac{d\xi}{dr} = \sqrt{\frac{4r^4 + A^2}{4r^4\left(1 - \frac{A}{r}\right)}} \qquad (19)$$

und wenn wir ξ als Funktion von R ausdrücken, resultiert an Stelle von (12):

$$\xi = \int\sqrt{\frac{4A^2 + (1 - R^2)^4}{(1 - R^2)^4}}\, dR. \qquad (20)$$

Der Vorteil, die Oberfläche so auszudrücken, ist, daß man reelle Werte von ξ erhält für Werte von R im Intervalle:

$$0 \leq R \leq 1,$$

woraus folgt, daß das Variationsfeld von r statt (14):

$$A \leq r \leq \infty$$

ist.

In diesem Falle hat man für $R = 0$:

$$\frac{d\xi}{dR} = \sqrt{4A^2 + 1}$$

und da A sehr klein ist, wird der Winkel, den die Generatorkurve im Ausgangspunkt bildet, nahezu 45^0 sein. Auf gleiche Weise, wie vorher, haben wir diesmal für $R = 1$ $\frac{d\xi}{dR} = \infty$,

Für $R = 0$ ist auch

$$\frac{d^2\xi}{dR^2} = 0,$$

d. h., wir haben einen Wendepunkt im Ausgangspunkt.

In der Fig. 2 stellen wir die Oberfläche dar, ohne den Teil zu zeichnen, der dem negativen ξ entspricht.

Schließlich ist der Ausdruck für ξ als Funktion von R, indem wir $\alpha = 4A^2$ nehmen:

$$\xi = \sqrt{1 + \alpha}\cdot R + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}\frac{4!}{3!}\cdot\frac{R^3}{3!} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}\, 2(2 \times 2 - 1)\frac{5!}{3!}\frac{R^5}{5!} +$$
$$+ \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}\cdot 2^{n-1}(2n - 1)\frac{(n + 3)!}{3!}\cdot\frac{R^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \cdots$$
$$= \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}\left[\frac{1 + \alpha}{\alpha}R + \frac{2}{3}R^3 + R^5 + \frac{10}{21}R^7 + \frac{7}{54}R^9 + \frac{4}{165}R^{11} + \cdots\right],$$

d. h. eine Reihe, die uniform konvergent ist in dem Intervall:

$$0 < R < 1.$$

Wir glauben, daß es uns gelungen ist, durch diese geometrische Veranschaulichung, in einem Spezialfall ein konkretes Bild zu geben von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie, ein Bild, das die Bedeutung der Gravitation in der nämlichen Theorie verständlich macht.

La Plata, 17. April 1926.

(Eingegangen 30. Juni 1926.)

BESPRECHUNGEN.

Hugo Dingler, Der Zusammenbruch der Wissenschaft und der Primat der Philosophie. 400 S. München, E. Reinhardt. 1926. Geb. M. 16.—.

Es ist nicht leicht, von dem Inhalt dieses nicht nur umfangreichen, sondern auch gedankenreichen Werkes in wenigen Worten Rechenschaft zu geben und es ist überhaupt kaum möglich, wenn man die in vorhergehenden Schriften des Verfassers entwickelten erkenntniskritischen und wissenschaftstheoretischen Überlegungen und Ansichten nicht als bekannt voraussetzen will. Und auch die endgültige Stellungnahme wird wie bei allen philosophischen Untersuchungen trotz aller Schärfe der Deduktionen und Klarheit der Beweisführungen letzten Endes auch